# OM INTEGRALEKVATIONERNAS BETYDELSE FÖR HYDRODYNAMIKEN.

AV

C. W. OSEEN.

---

Det som jag i detta föredrag önskar redogöra för är ett par av de resultat, till vilka jag kommit under de två sista åren, och som jag tror vara av mera allmänt intresse. Jag måste förutskicka några anmärkningar. Hydrodynamiken är, som bekant torde vara, den del av mekaniken, som handlar om, eller åtminstone borde handla om vätskornas rörelser. I detta föredrag inskränker jag mig helt och hållet till de osamnantryckbara vätskorna. Det viktigaste faktum, som är bekant om dem, är följande. Man måste skilja på två slag av rörelser. Man har dels långsamma, regelbundna rörelser, detta är den hydrodynamiska rörelsefasen, dels oregelbundna, turbulenta rörelser, den hydrauliska rörelsefasen. De lagar man har för en vätskas rörelse äro vunna genom studiet av de långsamma, regelbundna rörelserna. Huruvida dessa lagar äro giltiga också för de turbulenta rörelserna, därom äro meningarne ännu delade, om än, efter min mening, den tidpunkt nu är kommen, då man kan slutgiltigt besvara frågan. Undrar man, hur meningarne kunna vara delade om en sådan sak, så är det tillräckligt att kasta en blick på de hydrodynamiska diff. ekv:na för att förstå en av anledningarne:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\Delta u,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Den icke-lineära formen hos dessa ekvationer har gjort, att det som man vetat om deras lösningar ända till de sista åren varit ytterst



www.rcin.org.pl

litet. Jag ställde mig för några år sedan den uppgiften att lyfta på den slöja, som vilade över dem. Den metod jag hade att använda torde vara klar för varje matematiker, som sysslat med de partiella diff: ekv:s teori. Jag måste först utelämna de icke-lineära termerna. Jag fick så ett lineärt system. Jag bestämde dettas grundlösningar. Med hjälp av dem överförde jag de hydrodyn. diff: ekv:na till ett system av integralekvationer. En av dessa har jag här uppskrivit.

$$4\pi\sqrt{\mu\pi}\, u(x, y, z, t) =$$

$$= \int_{\infty} \left(u(\xi, \eta, \zeta, t_0)\, u'_{\xi} + v(\xi, \eta, \zeta, t_0)\, v'_{\xi} + w(\xi, \eta, \zeta, t_0)\, w'_{\xi}\right)_{\tau = t_0} d\omega +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\infty} \left\{ (X + v\bar{w} - w\bar{v})_{\xi, \eta, \zeta, \tau}\, u'_{\xi} + \cdots \right\} d\omega$$

$$\bar{u} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \ldots$$

Jag har därvid för enkelhetens skull begränsat mig till det fall, då vätskan fyller hela rummet. $u'_{\xi}$ etc. är grundlösningen. Med hjälp av dessa integralekv. kunde jag därpa övergå till frågan om lösningarne till de fullständiga hydrodynamiska diff. ekv. Jag erhöll därvid ett resultat, som jag kan uttrycka så: Är i en oändligt utsträckt vätska rörelsen vid en tidpunkt regulär, så finns det alltid därefter ett visst tidsintervall, under vilket rörelsen likaledes är regulär. Det jag här vill understryka är, att det tidsintervall, för vilket denna sats kan bevisas, är ändligt. Det är detta, som varit utgångspunkten för mina följande undersökningar.

Om den tidrymd, under vilken rörelsen i en vätska är regulär, är ändlig, så måste man naturligtvis ställa sig den frågan: vad inträffar i det ögonblick, då den reguljära rörelsen upphör? M. a. o. vad är den fysiska betydelsen därav, att rörelsen upphör att vara regulär? En hypotes ligger här nära. Det finns två slag av rörelser, den hydrodynamiska och den hydrauliska. Den reguljära rörelsen hör uppenbarligen till det första slaget. Det ligger nära att uppställa den hypotesen, att det som inträffar, då rörelsen upphör att vara regulär, är, att rörelsen inträder i den hydrauliska fasen. Är denna hypotes riktig, så skulle man alltså ha hunnit så långt, att man på rent teoretisk väg återfunnit de båda slagen av rörelse. — Frågan var nu: finns det något medel att pröva hypotesen. Ett sådant medel erbjöd sig genast. Övergången från den hydrodynamiska till den hydrauliska

www.rcin.org.pl

fasen kännetecknas därav, att virvlar uppträda i vätskan. Är hypotesen riktig, måste det alltså vara möjligt att visa, att i det ögonblick, då rörelsen upphör att vara regulär, en virvel uppstått. Jag föranleddes härav att undersöka de singulariteter, som kunna uppstå i en vätska. Jag skall icke ingå på undersökningens detaljer. Det är nog att nämna resultatet. Jag fann, att om i en oändligt utsträckt vätska rörelsen upphör att vara regulär, antingen förhållandena oändligt långt borta ändrats, eller någon av storheterna $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ någonstädes blivit oändlig eller slutligen någon av dessa storheters derivator med avs. på $x$, $y$, $z$ i någon punkt blivit oändlig. Är detta resultat det, som man borde vänta? Ja, till hälvten. Med den möjligheten, att förhållandena oändligt långt borta ändrats, behöver man icke befatta sig. Ett oändlighetsställe för $\bar{u}$, $\bar{v}$ eller $\bar{w}$ betyder, att virvelintensiteten blivit oändlig. Vi kunna då med fog säga, att en virvel uppstått. Så långt är allt gott och väl. Men det återstår en tredje möjlighet. Om den kan jag varken förneka existensen, ej heller ange dess fysikaliska betydelse. Jag måste då fråga mig: är det oundvikligt, att dessa oändlighetsställen för $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ etc. skola betraktas som singulariteter i rörelsen. Man ser nu genast, att om man utgår från de hydrodyn. differentialekvationerna, detta i själva verket är oundvikligt. I dem ingå nämligen de andra derivatorna av $u$, $v$, $w$[1]. Inträffar det, att någon av kvantiteterna $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ etc. blir oändlig, så måste samtidigt åtm. någon av dessa andra derivator bli oändlig. Utgår man från diff. ekv:na kan rörelsen i ett sådant fall omöjligt betecknas som regulär. Men man ser också, att det förhåller sig helt annorlunda, om man utgår från de hydrodynamiska integralekvationerna. I dem förekomma icke alls de partiella derivatorna av andra ordningen. Om dessa finnas och äro ändliga, det är från integralekv:nas synpunkt alldeles likgiltigt.

Den fråga jag härigenom föranleddes att ställa mig är följande: äro i hydrodynamiken de partiella diff. ekv. nödvändiga eller kan man gå förbi dem och direkt ur de fysiska grundhypoteserna härleda de hydrodyn. integralekv.? Här vill jag nu understryka, att detta problem uppträder icke blott i hydrodynamiken utan i den mat. fysikens nästan alla grenar. I nästan alla delar av den mat. fysiken

[1] I ekv. för en sammantryckbar vätskas rörelser ingå alla derivator av andra ordn. av $u$, $v$, $w$ m. a. p. $x$, $y$, $z$.

www.rcin.org.pl

är gången den, att man först uppställer diff. ekv. och sedan ur dem härleder integralekv. Så t. ex. föres man i elektrostatiken till det problemet att bestämma en funktion $\varphi$ sådan att för varje sluten yta $S$ och det därav begränsade rummet $\omega$ gäller:

$$\int_S \frac{d\varphi}{dn}\, dS = -4\pi \int_\omega \rho\, d\omega. \tag{1}$$

Det traditionella sättet att lösa detta problem är att ur (1) genom en gränsövergång, varvid man förutsätter existensen av funktionen $\varphi$:s andra derivator, härleda diff: ekvationen:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{2}$$

Ur (2) erhåller man därpå med hjälp av *Greens* satser:

$$\varphi(x, y, z) = \int_{\omega'} \rho \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) \right\} dS. \tag{3}$$

Man kan nu i alla dessa fall ställa sig den frågan: Äro differentialekv:na nödvändiga? Kan man icke gå förbi dem och direkt härleda integralekv:na? Kan man icke t. ex. komma från 1 til 3 utan att införa i räkningen de andra derivatorna?

Tiden medger mig icke att gå in på sakens detaljer. Jag måste nöja mig med att uttala resultatet. Svaret på frågan är jakande. Diff: ekv:na äro i själva verket överflödiga. — Jag vill däremot stanna ett ögonblick vid den frågan. Vad vinner man genom denna metod? Jag vill framhålla två punkter. Vad iakttagelsen kan ge är alltid i första hand integralrelationer, eftersom man aldrig kan iakttaga en i rum och tid isolerad punkt. Det den moderna matematiska behandlingen slutligen ger är återigen integralrelationer. Det är då ett framsteg i metodernas renhet att hela tiden operera med integralrelationer i st. f. differentialrelationer. Men vidare och huvudsakligen: det är ett väsentligt framsteg i enkelhet att gå förbi diff: ekv:na. För att se det behöver man blott betrakta det exempel jag nyss uppskrivit. Följer man den traditionella vägen har man efteråt den plikten at undersöka, huruvida:

$$\int \rho \frac{d\omega}{r}$$

verkligen har derivator av andra ordningen, som uppfylla ekv. 2. Det är bekant, vilken lång rad av subtila undersökningar denna fråga

www.rcin.org.pl

framkallat. Det sista betydande bidraget härrör som bekant från lektor *Petrini*, som väl kan sägas ha bragt frågan till avslutning. Det resultat, som framgått av dessa undersökningar, är, att för de andra derivatornas existens det fordras, att funktionen ρ utom kontinuitet har vissa andra, komplicerade egenskaper. Följer man däremot den väg jag föreslår, så träder i stället för frågan, om ekv. 2 är uppfyld, den, om ekv. 1 är uppfylld. Härför är kontinuitet hos funktionen ρ ett, icke nödvändigt, men väl tillräckligt villkor. Frågan om de andra derivatornas existens förlorar sitt matematiskt-fysiska intresse.

Jag går tillbaka till det hydrodynamiska problemet. Har man rätt att utgå från integralekv:na, så erhåller man lätt följande resultat. Om rörelsen upphör att vara regulär, så har någonstans i vätskan en virvel uppstått. Sammanställer man nu det man experimentellt vet om de två olika slagen av rörelse och om övergången från det ena slaget till det andra med dessa resultat av den matematiska analysen, så tror jag, att det är omöjligt att undgå den slutsatsen, att skilnaden mellan den hydrodynamiska rörelsefasen och den hydrauliska i själva verket är den, att de förstnämnda rörelserna äro rörelser utan singulariteter, de sistnämnda rörelser med singulariteter. Då jag uttalar detta, tror jag mig vara i överensstämmelse med prof. *Boussinesq*[1]).

Godkännes den nyss dragna slutsatsen, så vill jag därav draga en slutsats beträffande hydrodynamikens framtida utveckling. Vilka problem är hydrodynamiken överhuvud i stånd att lösa? Man kan uppdela alla hydrodynamiska problem i tre grupper. Den första omfattar alla rörelser hörande till den hydrodynamiska fasen. Problemet att beräkna dem är enligt min mening principiellt löst. En och annan fråga återstår, men det är otvivelaktigt, att dessa frågor kunna besvaras. I motsats häremot betraktar jag problemet att beräkna de hydrauliska rörelserna såsom olösbart. Man måste betänka vilka svårigheter man möter, om man vill numeriskt beräkna en vanlig analytisk funktion med blott någorlunda komplicerade singulariteter. Men här har man att göra, icke blott med singulära punkter utan dessutom med singulära kurver och ytor. Och dessa singulariteter förändras med tiden, uppkomma och försvinna. Att även i de gröfsta dragen beräkna en sådan rörelse ur de hydrodyn. diff: ekv:na eller de motsvarande integralekv:na förefaller mig ogörligt. Återigen tror

---

[1]) Jmf. *A. Boulanger*, Hydraulique générale, Doin et fils 1909. Jmf. också dr. *Kármáns* sköna uppsats: Über die Turbulenzreibung verschiedener Flüssigkeiten, Phys. Zeitschr. 1911 S. 283.

www.rcin.org.pl

jag mig här befinna mig i överensstämmelse med prof. *Boussinesq.* — Mellan de båda nänmda slagen av rörelse finns en tredje, rörelser med regelbundna singulariteter. Till detta slag hör en hel rad av teoretiskt och praktiskt viktiga fall. Om dessa rörelser är ännu mycket litet bekant. Här är det område, där enligt min mening, hydrodynamiken har att sätta in. Jag upprepar och jag understryker det: det är dessa problem, som kunna lösas. Den tanken däremot, att man ur de hydrodynamiska differential- eller de motsvarande integral-ekvationerna skulle kunna beräkna så komplicerade rörelser, som de flesta av dem, som förekomma i naturen, den vilar enligt min mening på ett misskännande av dessa ekvationers analytiska natur.

www.rcin.org.pl